Una nota sulla matematica di
Produzione di merci a mezzo di merci

Con l'aggiunta di una nota sulla convergenza dell'algoritmo di Sraffa e di un'Appendice
Intervento tenuto al Convegno "Sraffa o un'altra economia", 12-13 Dicembre, Roma.

Marco Lippi
Dipartimento di Scienze Economiche, Università "La Sapienza", Roma

Sostengo che esiste una importante differenza tra (i) il processo mediante il quale un risultato matematico viene raggiunto e (ii) una prova rigorosa del risultato. Non credo che ci sia bisogno di spiegare cosa si debba intendere con (ii). Per quanto riguarda invece (i), mi riferisco ad una successione di oggetti mentali: esempi che siano trattabili e sembrino contenere l'essenziale del problema, dimostrazioni condotte su esempi ma che sembrino generalizzabili, strumenti grafici che consentano dimostrazioni ma solo quando la dimensione del problema sia due o tre, dimostrazioni condotte sul caso generale che siano difettose o incomplete ma che sembrino emendabili, costruzioni ausiliarie che mostrino ciò che non è immediatamente visibile nel problema; una successione di oggetti mentali che produca la percezione di quali risultati sono raggiungibili per l'oggetto matematico in esame.

Naturalmente il processo (i) è il presupposto della dimostrazione rigorosa: questa viene intrapresa solo quando si sa già cosa si vuole dimostrare. La mia opinione è che in Sraffa il processo (i) è straordinariamente robusto e conduce a risultati di straordinaria importanza, a dispetto di una matematica difettosa. Qui sotto fornisco alcuni esempi.

Questa versione contiene un'aggiunta stimolata da una discussione con Neri Salvadori subito dopo il mio intervento l convegno, e un'Appendice in cui mostro che l'algoritmo di Sraffa può essere sistemato in modo da fornire la convergenza al saggio massimo del profitto, ed una dimostrazione elementare del Teorema di Perron-Frobenius, basata sulle idee di Sraffa.

1. Senza perdere in generalità si può supporre che le quantità prodotte delle n merci del sistema siano unitarie (basta cambiare se necessario le unità di misura). Inoltre, indicherò con a_{ij} la quantità della merce j impiegata nell'industria i, con A la matrice delle quantità a_{ij}, con l_i la quantità di lavoro impiegata nell'industria i e con l il vettore colonna delle quantità l_i. Le quantità l_i sono tutte positive.

La prima questione è la seguente: è possibile trovare in *Produzione di merci a mezzo di merci*, Parte I, una dimostrazione del fatto che per r compreso tra 0 e il massimo esistono valori *positivi* dei prezzi di produzione? E cioè un vettore colonna p, con tutte le componenti positive, tale che

$$p = A(1 + r)p + lw.$$

Sraffa si pone questo problema in modo esplicito soltanto nel par. 39. La soluzione che fornisce—su cui non mi fermo—parte dal fatto che per $r = 0$ i prezzi di produzione sono proporzionali alle quantità di lavoro incorporato nelle diverse merci, le quali sono, afferma Sraffa, necessariamente tutte positive.

Nel par. 14, al quale rimanda nel par. 39, Sraffa ha già sostenuto che per $r = 0$ le merci si scambiano secondo le quantità di lavoro incorporato, senza però dire nulla sulla loro determinazione e positività.

Una nota al par. 14 rimanda alla Appendice A sui Subsistemi, nella quale Sraffa presenta l'argomento seguente: dato il sistema originario, questo si può suddividere in subsistemi, tanti quante sono le merci che formano il prodotto netto. Il subsistema corrispondente alla merce i produce un prodotto netto contenente solo la merce i, nella quantità contenuta nel prodotto netto del sistema originario, sia questa y_i. La quantità di lavoro necessaria direttamente e indirettamente per produrre la quantità y_i della merce i coincide con la quantità di lavoro impiegata direttamente nel subsistema i. Sraffa osserva: "Cosí nel sub-sistema vediamo a colpo d'occhio, e nel suo complesso, la stessa quantità di lavoro che otteniamo come somma di una serie di termini quando risaliamo per le fasi successive della produzione di una merce (cap. VI)."

Il cap. VI è quello sulla riduzione a quantità di lavoro di epoche diverse. Dunque, mi sembra, ciò che nel par. 14 è stato dato per scontato è che il lavoro incorporato nelle merci si può determinare come somma di quantità di lavoro prestate nel periodo corrente, nel periodo precedente, ecc., e cioè, indicando con λ le quantità di lavoro incorporato:

$$\lambda = l + Al + A^2 l + \cdots, \tag{1}$$

che è un caso particolare della riduzione per i prezzi

$$p = lw + A(1+r)lw + A^2(1+r)^2 lw + \cdots. \tag{2}$$

Osservando (1) è evidente che nessuno dei λ_i può essere negativo (o nullo, se solo si suppone che per almeno una delle merci base sia positiva la quantità di lavoro direttamente necessaria). Ma questo non conclude la discussione perché resta da dimostrare che le componenti di λ sono *finite*, e cioè che la serie (1) converge.

La convergenza di (1), implicita e scontata nel par. 14, è esplicita nel cap. VI, ma di nuovo data per scontata (nel cap. VI viene data per scontata la convergenza di (2) per tutti valori di r inferiori al massimo).

Una dimostrazione della convergenza di (1) può essere ottenuta sulla base dell'ipotesi che sia possibile riproporzionare il sistema originario in modo tale da ottenere quantità positive di tutte le merci nel prodotto netto, ciò che è ovvio nel sistema con sovrappiù: le merci non base sono presenti con quantità positive nel prodotto netto; basta ridurne la produzione di una piccola quantità per avere nel prodotto netto anche quantità positive di alcune merci base; poi ridurre di una piccola quantità la produzione di queste ultime, ecc.). Dunque esiste un vettore (riga) q tale che $q > qA$ (maggiore per tutte le componenti). Ma allora per un α tale che $0 < \alpha < 1$, avremo $q > \frac{1}{\alpha}qA$. Iterando: $q > \frac{1}{\alpha^s}qA^s$, ossia $\alpha^s q > qA^s$. Poiché $q > 0$ tutti i termini di A^s tendono a zero con velocità almeno pari a quella con cui α^s tende a zero. E questo implica la convergenza di (1).

L'intera questione può essere riassunta in questo modo. I prezzi corrispondenti a $r = 0$ sono la soluzione del sistema di equazioni simultaneee

$$\lambda = A\lambda + l. \tag{3}$$

Esiste una soluzione positiva? La risposta che la soluzione esiste ed è il secondo membro di (1) non è sufficiente: è ovvio che il secondo membro di (1) non può produrre termini negativi ma bisogna dimostrare che converge. Sraffa non sembra accorgersi del problema, la cui soluzione, per quanto semplice, non è del tutto banale, e comunque non più semplice di altri argomenti da lui sviluppati in tutti i dettagli (si veda ad esempio proprio l'argomento impiegato nel par. 39 per provare la positività del vettore dei prezzi per r positivo e minore di R).

Mi è stato fatto osservare quanto segue: se si fosse dimostrato che p è finito e positivo per $r < R$ (ciò che Sraffa pensa di aver fatto nel par. 39) allora, considerando il passo s-esimo della riduzione (cap. VI, par. 46),

$$p = lw + A(1+r)lw + \cdots + A^s(1+r)^s lw + A^{s+1}(1+r)^{s+1}p,$$

si ha che $p \geq lw + A(1+r)lw + \cdots + A^s(1+r)^s lw$. Quindi il secondo membro di (2) converge (ciò che implica la convergenza a zero di $A^{s+1}(1+r)^{s+1}l$, e quindi di $A^{s+1}(1+r)^{s+1}$ e di $A^{s+1}(1+r)^{s+1}p$). Questo però mi sembra molto complicato, del tutto privo di riscontri nel par. 46, e comunque circolare visto che la dimostrazione del par. 39 si basa sull'esistenza e positività della soluzione di (3).

Infine, Sraffa non sembra accorgersi che lo stesso problema che sorge con (3) deve essere risolto per provare l'esistenza dei subsistemi. La costruzione del subsistema relativo alla merce i richiede la determinazione di moltiplicatori *non negativi* q_j, raccolti nel vettore riga q, tali che

$$q = qA + (0 \ \cdots \ y_i \ \cdots \ 0).$$

L'esistenza di q sembra scontata per Sraffa (Appendice A). In realtà essa lo è esattamente quanto è scontata la soluzione di (3). E la soluzione del problema si ottiene nello stesso modo: se A^s tende a zero geometricamente (ciò che è garantito, come si è visto, dall'esistenza di un sovrappiù):

$$q = Y_i + Y_i A + Y_i A^2 + \cdots,$$

dove $Y_i = (0 \ \cdots \ y_i \ \cdots \ 0)$. In altri termini, per ottenere il prodotto netto Y_i è necessario produrre Y_i, più i mezzi di produzione necessari per ottenere Y_i, e cioè $Y_i A$, più i mezzi di produzione necessari per ottenere $Y_i A$, ecc.

2. La seconda questione è la seguente: è possibile trovare in *Produzione di merci a mezzo di merci*, Parte I, una dimostrazione dell'esistenza della merce tipo?

Sraffa ne propone una nel par. 37. Senza perdita di generalità possiamo supporre che tutte le merci siano base.

(a) Per ipotesi il vettore delle quantità prodotte è $u = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)$. Cominciamo ponendo $q^{(1)} = u$. Se $q^{(1)} - q^{(1)}A > 0$, ossia se il prodotto netto è positivo in tutte le sue componenti, poniamo $Q^{(1)} = q^{(1)}$, altrimenti modifichiamo "le proporzioni delle industrie del sistema in modo che di ciascuna delle merci base venga prodotta una quantità superiore al minimo necessario per il reintegro dei mezzi di produzione", e indichiamo con $Q^{(1)}$ i livelli di attivazione cosí ottenuti.

(b) Consideriamo poi i rapporti

$$\rho_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k^{(1)} a_{kj}}{Q_j^{(1)}},$$

e sia $\rho^{(1)}$ il massimo tra i ρ_j. Si noti che $1 > \rho_j > 0$. Ora sottoponiamo i metodi di produzione ad una modifica immaginaria: facciamo diminuire il prodotto di ciascuna industria da $Q_j^{(1)}$ a $\rho^{(1)} Q_j^{(1)}$ senza cambiare i coefficienti a_{ij}. Il vettore delle quantità prodotte diventa $Q^{(1)}\rho^{(1)}$ e almeno per un'industria il prodotto netto è nullo.

(c) Se il prodotto netto è nullo per tutte le industrie, allora il rapporto tipo è stato trovato ed è:

$$\frac{1 - \rho^{(1)}}{\rho^{(1)}}.$$

Altrimenti si pone $q^{(2)} = Q^{(1)}\rho^{(1)}$ e si torna al passo (a), ottenendo $Q^{(2)}$, poi al passo (b), ottenendo $\rho^{(2)}$, ecc. Dopo h applicazioni dei passi (a) e (b) la riduzione della produzione, uniforme per tutte le industrie e fermi restando i coefficienti a_{ij}, è

$$\rho^{(1)}\rho^{(2)} \ \cdots \ \rho^{(h)}. \tag{4}$$

Sraffa afferma: "Continuiamo tale alternarsi di riduzioni proporzionali da una parte, e di aggiustamenti per ristabilire un'eccedenza di ciascun prodotto dall'altra, fino a che si raggiunga il punto dove il prodotto risulterà ridotto in misura tale che il completo reintegro dei mezzi di produzione sarà appena possibile, senza che rimanga alcuna eccedenza."

Non è del tutto chiaro se questo passaggio vada interpretato come la descrizione di un passaggio al limite o di un processo finito mediante il quale viene raggiunto il rapporto tipo. Osservo però che ottenere il rapporto tipo alla iterazione s-esima equivale a "centrare" l'autovettore corrispondente all'autovalore massimo della A quando si determina $Q^{(h)}$, ciò che ha probabilità zero di avvenire. Propongo quindi la prima interpretazione del passo di Sraffa, la quale implica:

$$\lim_{h \to \infty} \prod_{k=1}^{h} \rho^{(k)} = \frac{1}{1+R}. \tag{5}$$

Bisogna però osservare che c'è una importante differenza tra il passo (a) e il passo (b). Nel secondo viene applicata una regola completamente automatica, nel primo invece dobbiamo scegliere tra infiniti modi di ottenere $Q^{(h)}$ a partire da $q^{(h)} = Q^{(h-1)}\rho^{(h-1)}$. Quindi esistono infinite successioni di Q e di ρ. Sraffa sostiene, mi sembra, che il limite in (5) sia indipendente dalla successione dei Q e dei ρ. Ma questo non è vero. Se esiste una successione $Q^{(1)},\ Q^{(2)},\ \ldots$, per la quale valga (5), ne esiste anche un'altra, $\hat{Q}^{(1)},\ \hat{Q}^{(2)},\ \ldots$, per la quale

$$\lim_{h\to\infty}\prod_{k=1}^{h}\hat{\rho}^{(k)} > \frac{1}{1+R}. \tag{6}$$

In effetti, al variare della scelta di $Q^{(1)}$ la riduzione $\rho^{(1)}$ varia nell'intervallo $[\frac{1}{(1+R)}\ \ 1)$ (il limite inferiore verrebbe raggiunto se $Q^{(1)}$ coincidesse con l'autovettore). Esiste quindi un $\hat{Q}^{(1)}$ tale che $\hat{\rho}^{(1)} > \rho^{(1)}$. Al variare della scelta di $\hat{Q}^{(2)}$ la riduzione $\hat{\rho}^{(2)}$varia nell'intervallo

$$\left[\frac{1}{(1+R)\hat{\rho}^{(1)}}\quad 1\right) \supset \left[\frac{1}{(1+R)\rho^{(1)}}\quad 1\right).$$

Esiste quindi un $\hat{Q}^{(2)}$ tale che $\hat{\rho}^{(2)} > \rho^{(2)}$. Procedendo in questo modo si ottiene (6).

Il problema della dimostrazione di Sraffa è che non viene fornita alcuna regola per scegliere Q nel passo (a). Credo che sia possibile farlo in modo da garantire (5). Ma questo non è importante. Mi interessa soltanto notare come anche in questo caso una vera e propria dimostrazione non sia presente.

3. La terza questione riguarda le merce tipo. Sraffa mostra che se si usa la merce tipo come misura, il saggio del profitto e il saggio del salario sono legati da una relazione lineare decrescente (par. 43). Successivamente (par. 49) dimostra, *usando la riduzione a quantità di lavoro datate,* che quando il saggio del profitto aumenta, il prezzo di una qualsiasi merce, misurato nella merce tipo, non può scendere in proporzione maggiore della discesa del salario, ciò che equivale a dire che la relazione tra saggio del salario e saggio del profitto è decrescente quale che sia la unità di misura nella quale il salario viene misurato. Ho sempre trovato questo modo di procedere inutilmente complicato e tale da oscurare il fatto che l'equzione di riduzione, da sola, è sufficiente a raggiungere il risultato. In effetti, se q è l'unità di misura dei prezzi, l'equazione di riduzione dà:

$$1 = qp = qlw_q + qA(1+r)lw_q + qA^2(1+r)^2lw_q + \cdots ,$$

dove w_q è il salario misurato in q, da cui si conclude immediatamente che se r aumenta w_q deve diminuire.

Conclusioni. Sappiamo che i risultati presentati da Sraffa in *Produzione di merci a mezzo di merci*, Parte I, possono essere riformulati nel linguaggio matematico standard (teoria delle matrici positive, autovalori, autovettori, Teorema di Perron-Frobenius, ecc.) e dimostrati in modo rigoroso. Ho tentato sopra di motivare l'opinione che l'esposizione di che Sraffa dà nel suo libro sia molto più vicina al processo che ho indicato con (i) nell'Introduzione, che ad una prova rigorosa. In alcuni casi importanti le argomentazioni di Sraffa sono difettose, insufficienti o inutilmente complicate.

Ciò è solo apparentemente in contrasto con il fatto che Sraffa abbia trovato risultati di grande importanza, fino allora insospettati, e che tali risultati abbiano resistito a tentativi di critica che venivano da studiosi matematicamente più attrezzati di lui. Il fatto è che il processo (i) era solido. Se vi fossero stati difetti nelle conclusioni, l'apparato di esempi, dimostrazioni parziali, costruzioni ausiliarie, ecc., li avrebbe rivelati. Al contrario, autori come Levhari e Samuelson, che conoscevano certamente bene l'Algebra Lineare, credettero di poter intervenire sui problemi sollevati da Sraffa senza avere prima esplorato intuitivamente il problema. E, inaspettatamente, fallirono.

Aggiunta a proposito dell'algoritmo per ottenere la merce tipo. Durante il convegno Neri Salvadori ha attirato la mia attenzione su un suo lavoro, in collaborazione con Heinz D. Kurz, "Sraffa and the Mathematicians" (in Kurz e Salvadori (a cura di) *Classical Economics and Modern Theory*, 2003, London: Routledge). K. e S. riportano un'osservazione di Alister Watson a proposito dell'algoritmo: "It isn't quite obvious that the first type of step can always be carried out" (p. 206). A me sembra invece che il riproporzionamento che sopra ho indicato con (a) sia piuttosto ovvio, dal punto di vista di Sraffa. Sempre supponendo che le merci siano tutte base e che, diciamo, il prodotto netto della prima sia positivo, cioè

$$y_1 = q_1 - \sum_{i=1}^{n} a_{i1} q_i > 0,$$

possiamo ridurre y_1 di $\eta < y_1$ e q_1 di η/a_{11}. In questo modo aumenta di una quantità positiva il prodotto netto di tutte le merci direttamente necessarie a produrre la merce 1, e quindi diventa positivo il prodotto netto delle merci direttamente necessarie a produrre la merce 1, le quali avevano inizialmente un prodotto netto nullo. La finitezza del numero delle merci e l'ipotesi che siano tutte base assicurano il risultato.

Dunque l'osservazione di Watson è facilmente superabile usando un argomento che mi sembra "tipicamente Sraffiano". Non so quindi se sia giusto affermare, come K. e S. fanno, "It is not clear whether Sraffa understood Watson's concern" (p. 206). O almeno, se non lo capiva era probabilmente per l'eccessiva ovvietà, dato il suo modo di ragionare, della possibilità del riproporzionamento. (Si noti che qui sto solo dicendo che è ovvio, perfettamente alla portata di Sraffa, che si può ottenere un prodotto netto tutto positivo a partire da un prodotto netto solo semipositivo. Non sto dicendo che è ovvio, come Sraffa sembra ritenere nella Appendice A, che si può ottenere un *dato* prodotto netto $(y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)$. Su questo si veda la Sezione 1 qui sopra.) Possiamo quindi concludere che un algoritmo come quello di Sraffa esiste. Il problema è però se converge.

K. e. S. (p. 206) danno un esempio di algoritmo secondo la linea di Sraffa. Precisamente, nella nota a p. 206 pongono

$$q_i = \alpha_i q_{i-1} (\lambda_{i-1} I - A)^{-1}, \tag{7}$$

dove α_i è il coefficiente di normalizzazione per cui $q_i l = 1$. (Mi pare che il testo di K. e S. contenga un errore di battitura: la matrice che figura nella (7) deve essere, se non capisco male, $\lambda_{i-1} I - A$, e non la loro $I - A$.) Il prodotto netto $q_i(\lambda_{i-1} I - A)$ è proporzionale al prodotto q_{i-1} ed è perciò positivo in tutte le sue componenti. K. e S. concludono "Since the sequence $\{\lambda_i\}$ is decreasing and bounded from below ($\lambda_i > 0$), it converges to the requested solution" (il loro λ_i è uguale al mio prodotto (4) per $s = i$).

Ho due osservazioni. La prima è che (7) riproporziona secondo la regola: trovare le quantità q_i in modo che il prodotto netto risultante sia proporzionale alle quantità q_{i-1}. Questo è lo stesso problema che si deve risolvere nella determinazione di un subsistema (e infatti K. e S. usano $(\lambda_{i-1} I - A)^{-1}$), problema che Sraffa, come ho notato nella Sezione 1, non risolve.

La seconda osservazione è più importante: il fatto che la serie dei λ_i decresca e sia nonnegativa garantisce la convergenza, ma non la convergenza alla "requested solution", come ho osservato nella Sezione 2. Questo non esclude che l'algoritmo definito da K. e S. in (7) converga in effetti alla "requested solution". Lascio però volentieri a loro il piacere di trovare una dimostrazione formale.

Appendice

A1. Ho supposto sopra per comodità che le quantità prodotte siano unitarie e indico ora con u il vettore $(1\ 1\ \cdots\ 1)$. Suppongo anche che tutte le merci siano base, ossia che A sia indecomponibile. L'ipotesi cruciale è che il sistema sia vitale, ossia che

$$u \geq uA \tag{8}$$

(maggiore in almeno una componente).

A2. Da (8) segue che esiste $q \geqq 0$ (non minore in alcuna componente) tale che

$$q > qA \tag{9}$$

(maggiore in tutte le componenti). Questo risultato si ottiene in maniera elementare.

A3. Si consideri la matrice As, con $s > 1$, corrispondente ad un sistema in cui i metodi produttivi siano "peggiorati" in modo uniforme, e sia Σ l'insieme dei valori di s per cui As è vitale. Poichè ci sono merci base Σ è limitato superiormente. Inoltre, osservando (9) si vede subito che Σ è un intervallo della forma $[1\ S)$.

A4. È facile dimostrare che per $s \in \Sigma$ la serie

$$I + As + A^2s^2 + \cdots \tag{10}$$

converge. In effetti, l'esistenza di $q \geqq 0$ tale che $q > qAs$ implica l'esistenza di un $\beta > 1$ tale che $q > q\beta As$. Si ottiene subito $q > q\beta^k A^k s^k$. Ne segue che $A^k s^k$ converge a zero geometricamente e quindi vale la (10). Di conseguenza, il problema di determinare le quantità q che permettono di ottenere il prodotto netto $y \geq 0$ nel sistema As, ossia la soluzione di

$$q - qAs = y, \tag{11}$$

ammette la soluzione

$$q_y(s) = y + yAs + yA^2s^2 + \cdots.$$

La soluzione $q_y(s)$ è unica. Se q' è una soluzione, allora

$$q' = y + q'As = y + \big(y + q'As\big)\,As = y + yAs + q'A^2s^2 = \cdots = q_y(s).$$

Inoltre $q_y(s) > 0$ quali che siano y e $s \in \Sigma$. Si noti infine che se la serie (10) converge allora (11) ha soluzione per $y \geq 0$ e quindi As è vitale. In conclusione le tre proposizioni seguenti sono equivalenti:
1. As è vitale.
2. La serie $I + As + A^2s^2 + \cdots$ converge.
3. $A^k s^k$ converge a zero geometricamente.

A4.1 In seguito si utilizzerà il fatto che $q_y(s)$ è una funzione continua di s in $[1 S)$. La dimostrazione è molto semplice. Sia

$$N_k(s) = yA^{k+1}s^{k+1} + yA^{k+2}s^{k+2} + \cdots.$$

Sia ha $q_y(s) = M_k(s) + N_k(s)$, dove la definizione di $M_k(s)$ è ovvia. La nonnegatività di A implica che $N_k(s) \geqq N_k(s')$ per $s > s'$. Ora, sia $\hat{s} \in [1\ S)$ e sia $\hat{s} < s^* < S$. Sia k tale che $N_k(s^*) < \epsilon\,(1\ 1\ \cdots\ 1)$. Si ha, per $s < s^*$,

$$\big|q_y(\hat{s}) - q_y(s)\big| \leq |M_k(\hat{s}) - M_k(s)| + 2\epsilon\ |(1\ 1\ \cdots\ 1)| = | \leq |M_k(\hat{s}) - M_k(s)| + 2\epsilon\sqrt{n}.$$

Il risultato segue dalla ovvia continuità di $M_k(s)$.

A5. Tutte le componenti della serie

$$y + yAS + yA^2S^2 + \cdots$$

divergono. Se una componente diverge allora devono divergere anche i suoi mezzi di produzione, ecc. Quindi se una diverge divergono tutte, e se una converge convergono tutte. Se tutte convergono si può risolvere $q - qAS = y$ come in A4, quindi AS è vitale, contro l'ipotesi. Usando i vettori $y = (0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0)$, si vede subito che tutti gli elementi della serie di matrici

$$I + AS + A^2S^2 + \cdots$$

divergono. Con lo stesso argomento, tutte gli elementi della matrice

$$I + As + A^2s^2 + \cdots$$

divergono quando s tende a S.
A5.1 Quindi, dato y, tutte le componenti di $q_y(s)$ divergono per $s \to S$. Inoltre, si definisca $\hat{q}_y(s)$ il vettore di quantità che permette di ottenere un prodotto netto di composizione uguale a quella di y, e tale che sia soddisfatto il vincolo $\hat{q}_y(s)l = 1$. Si ha ovviamente

$$\hat{q}_y(s) = \frac{q_y(s)}{q_y(s)l} \quad \hat{y}(s) = \frac{y}{q_y(s)l},$$

dove con $\hat{y}(s)$ si è indicato il prodotto netto che si ottiene rispettando il vincolo. Si noti che poiché $q_y(s)l$ tende all'infinito per $s \to S$, il prodotto netto $\hat{y}(s)$ tende a zero.

A6. Vale la relazione

$$\hat{q}_y(s) - \hat{q}_y(s)As = \hat{y}(s),$$

entrambi i membri della quale tendono a zero per $s \to S$. Se il vettore $\hat{q}_y(s)$ convergesse, chiamando Q il limite, avremmo

$$Q - QAS = 0, \quad Ql = 1, \tag{12}$$

e cioè un sistema tipo. Poiché $\hat{q}_y(s) > 0$, necessariamente $Q \geq 0$. D'altra parte, poiché tutte le merci sono base, non è possibile che una merce non venga prodotta se almeno un'altra deve essere prodotta e il prodotto netto non contiene saldi negativi, quindi $Q > 0$.
A6.1 Se esiste $Q \geq 0$ che soddisfa (12) allora: (a) $Q > 0$ e, (b) Q è unico, ossia non esiste alcun altro vettore (con componenti di qualsiasi segno) che soddisfi (12). La parte (a) è già stata provata in A6. Supponiamo che Q' sia diverso da Q e soddisfi (12). Allora $Q - \lambda Q'$ soddisfa (12). È ovvio che si può trovare un λ^* tale che $Q - \lambda^* Q' \geq 0$ e che almeno una componente di $Q - \lambda^* Q'$ sia nulla. Ma questo è assurdo per l'argomento usato sopra in A6. Questo argomento, peraltro semplicissimo, andrebbe aggiunto alla dimostrazione dell'unicità della merce tipo che Sraffa dà nel par. . In effetti, l'argomento di Sraffa prova che se esiste Q che soddisfa (12), allora non esiste alcun vettore Q' che soddisfi le condizioni

$$Q' - Q'AS' = 0, \quad Q'l = 1,$$

con $Q' > 0$ e $S \neq S'$.

A7. Veniamo ora all'algoritmo di Sraffa. Qui viene proposta una forma equivalente, che trovo più comoda: ad ogni passo faccio aumentare le quantità impiegate dei mezzi di produzione invece di far diminuire le quantità prodotte. Il problema che è stato messo in evidenza nel testo dell'intervento, e cioè il fatto che Sraffa non fornisce una regola per determinare la composizione della produzione ad ogni iterazione, viene qui risolto nel modo seguente: si sceglie un vettore $y > 0$ (positivo in tutte le componenti); ad ogni iterazione la produzione deve essere riproporzionata in modo da fornire un prodotto netto della stessa composizione di y.

Dunque partiamo da un vettore $y > 0$. Avremo bisogno della seguente funzione $f : [1\ S) \to \mathbb{R}$:

$$f(s) = \min_{j=1,\dots,n} \frac{q_{yj}(s)}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_{yi}(s)}$$

dove $q_{yj}(s)$ è la j-esima componente del vettore $q_y(s)$. In altri termini, dato $s \in [1\ S)$, determiniamo $q_y(s)$, poi facciamo crescere in modo uniforme i termini della matrice As fino ad annullare il prodotto netto in almeno una componente, senza che alcuna divenga negativa. Il moltiplicatore che cosí si ottiene è $f(s)$. Naturalmente, poiché $y > 0$, $f(s) > 1$ per qualsiasi $s \in [1\ S)$. Si noti che la medesima funzione verrebbe ottenuta scegliendo αy invece di y, per qualsiasi α positivo.

Poniamo $q^{(1)} = \hat{q}_y(1)$, cioè il vettore di quantità che produce un prodotto netto di composizione y, con la matrice A, e soddisfa il vincolo sulla quantità di lavoro impiegata. Supponiamo che y e $q^{(1)}$ non abbiano la stessa composizione, altrimenti il sistema tipo sarebbe già stato trovato.

Definiamo $\tau_1 = f(1)$. Poi poniamo $q^{(2)} = \hat{q}_y(\tau_1)$, e $\tau_2 = f(\tau_1)$, e poi $q^{(3)} = \hat{q}_y(\tau_1\tau_2)$ e $s_3 = f(\tau_1\tau_2)$, e quindi $q^{(h)} = \hat{q}_y(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{h-1})$ e $\tau_h = f(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{h-1})$.

Naturalmente $s_h = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{h-1}$ è crescente, poiché tutti i τ sono maggiori di 1, e non può superare S, quindi è convergente. Supponiamo che, per $h \to \infty$, s_h converga a $S^* < S$. Ciò implica che

$$\lim_{h\to\infty} \tau_h = \lim_{h\to\infty} f(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{h-1}) = \lim_{h\to\infty} f(s_h) = 1, \quad s_h \in [1\ S^*]. \tag{13}$$

D'altra parte, $f(s)$ è una funzione continua di s (si veda A4.1 per la continuità di q_y) , e poiché $f(s) > 1$ nell'insieme chiuso $[1\ S^*]$, il minimo di f in $[1\ S^*]$ è maggiore di 1. Di conseguenza (13) è impossibile ed è provato che s_h converge a S.

Ora bisogna dimostrare che $q^{(h)}$ converge. Prendiamo la sua componente j-esima $q_j^{(h)}$ e poniamo:

$$a_{1j} = \operatorname*{maxlim}_{h\to\infty} q_j^{(h)} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{h\ge m} q_j^{(h)}$$
$$a_{2j} = \operatorname*{minlim}_{h\to\infty} q_j^{(h)} = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{h\ge m} q_j^{(h)}.$$

È noto che la successione $q_j^{(h)}$ converge se e solo se $a_{1j} = a_{2j}$. Inoltre, esistono sottosuccessioni $q_j^{(z(h))}$ e $q_j^{(x(h))}$ che convergono rispettivamente a a_{1j} e a_{2j}. Ovviamente i vettori a_1 e a_2 soddisfano le condizioni (12). Quindi, per quanto visto in A6.1, deve essere $a_1 = a_2 = \lim_{h\to\infty} q^{(h)}$. Si noti anche che il limite è indipendente da y.

A8. Ponendo $R = S - 1$, il problema

$$p_L = l + A(1+r)p_L,$$

(prezzi misurati nel lavoro) ammette soluzione per $r < R$:

$$p_L = l + A(1+r)l + A^2(1+r)^2 l + \cdots.$$

Usando gli stessi argomenti adoperati in A4.1 e A5, si ha che $p_L(r)$ è una funzione continua per $r \in [0\ R)$, tutte le componenti della serie

$$p_L = l + A(1+R)l + A^2(1+R)^2 l + \cdots$$

divergono, tutte le componenti di $p_L(r)$ divergono per $r \to R$.

Consideriamo ora i prezzi misurati nella merce composita z, ossia

$$p_z(r) = \frac{p_L(r)}{z p_L(r)}.$$

Possiamo usare l'argomento impiegato in A6.1 per provare che può esistere solo un vettore p tale che $zp = 1$ e $p = A(1+R)p$. Questa unicità può essere poi usata, come in A7, per mostrare che massimo e minimo limite di $p_z(r)$, per $r \to R$, coincidono, e quindi che $p_z(r)$ converge per $r \to R$. Ponendo $p_z(R) = \lim_{r \to R} p_z(r)$, il vettore $p_z(r)$ è definito e continuo in $[0\ R]$.

Infine, il salario misurato in z, per $r < R$, è $w_z(r) = 1/z p_L(r)$. Ponendo $w_z(R) = 0$, si ottiene sia la continuità del salario in $[0\ R]$, che la validità in $[0\ R]$ della equazione $p_z(r) = l w_z(r) + A(1+r) p_z(r)$.

A9. In conclusione, l'algoritmo di Sraffa permette di ottenere la convergenza a S, purché venga effettuato in modo opportuno il riproporzionamento che è necessario nel passo (a) di ciascuna iterazione, che Sraffa lascia indeterminato. Una illustrazione che mi pare efficace è la seguente. Nel passo (b) di una iterazione le quantità prodotte in precedenza finiscono "sul bordo", nel senso che per alcune merci il prodotto netto è nullo. Allora le quantità vengono riproporzionate in modo da riportarle "all'interno". È necessario, quando si effettua questa operazione, che non ci si spinga all'interno "in misura via via minore". Più precisamente, bisogna fare in modo che il prodotto netto non tenda *in composizione* ad un vettore con qualche componente nulla: se questo accade il processo "si arena". Il par. A7, qui sopra, contiene una soluzione di questo problema, che non è unica ovviamente: si fa in modo che il prodotto netto, pur cambiando ovviamente ad ogni iterazione, non cambi in composizione. Per fare questo però bisogna risolvere il problema $y = q - qA$, su cui Sraffa non è mai esplicito, come ho detto nel par. 1 del testo.

Debbo anche sottolineare che Sraffa non sembra accorgersi dell'altro problema: anche se s_h converge a S, resta da dimostrare la convergenza di $q^{(h)}$. Per dimostrarla mi sono servito del fatto che non può esistere più di un sistema tipo corrispondente a S, problema che Sraffa non affronta.

A10. È interessante notare che usando gli strumenti elaborati in questa Appendice, che si ottengono mediante una semplice elaborazione di quellli che Sraffa adopera in *Produzione di merci,* Parte I, si ottiene una dimostrazione quasi completa del teorema di Perron-Frobenius. Inoltre, la dimostrazione "di Sraffa" è costruttiva: precisamente, l'autovalore positivo di massimo modulo viene ottenuto con un procedimento iterativo, e cioè l'algoritmo di Sraffa come completato qui sotto (ad esempio, la dimostrazione contenuta in Debreu, G. e I. N. Herstein (1953) Nonnegative square matrices, *Econometrica,* 597-607, è basata sul teorema del punto fisso di Brower, e quindi non è elementare né costruttiva).

Sia data una matrice nonnegativa indecomponibile A. Esiste un $\alpha > 0$ tale che $B = \alpha A$ è vitale. A B possono essere applicati gli argomenti espoti qui sotto. Il loro trasferimento ad A è immediato. Quindi possiamo partire da una matrice A vitale.

1. Esiste un autovalore positivo g per A e ad esso è associato un unico autovettore sinistro Q (identici risultati valgono per gli autovettori destri) positivo (normalizzato). Questo è stato dimostrato sopra in A6.1 e A7: $g = 1/S$.

2. Supponiamo che esista un autovalore g_1 con $|g_1| > g$. Ponendo $S_1 = 1/g_1$,

$$Q_1 = Q_1 S_1 A = Q_1 S_1^2 A^2 = \cdots = Q_1 S_1^k A^k,$$

con $Q_1 \neq 0$. Ma

$$S_1^k A^k \leqq |S_1|^k A^k \to 0,$$

perché $S_1 < S$, ciò che contraddice $Q_1 \neq 0$. Quindi non esistono autovalori di modulo maggiore di g.
3. Sia $Q_1 \geq 0$ tale che $g_1 Q_1 = Q_1 A$, e sia $Q_1 \neq Q$. Si vede subito che g_1 deve essere reale e positivo. Poiché $Q_1 \neq Q$, per l'unicità dell'autovettore associato a g, $g_1 < g$. Ponendo $S_1 = 1/g_1$, si ha $S_1 > S$. Poiché $Q_1 = S_1 Q_1 A$, per un $\delta >$ abbastanza piccolo, $S_1 - \delta > S$ e $Q_1 > (S_1 - \delta) Q_1 A$, ma questo è assurdo per la definizione di S. Dunque un autovettore reale e nonnegativo esiste solo per l'autovalore g. (Questa è una dimostrazione più semplice di quella di Sraffa della unicità della merce tipo.)
4. Non mi sembra possibile dimostrare "alla Sraffa" che l'autovalore positivo di massimo modulo è semplice, ossia è una radice semplice di $\det(xI - A) = 0$.